

第十二章 微分方程

一阶微分方程

同步练习

12.2.一

1. 微分方程 $y' = e^{x-y}$ 的通解为_____.

解 $y' = e^x e^{-y}$ 变量可分离方程

变量分离 $e^y dy = e^x dx$

两边积分 $\int e^y dy = \int e^x dx$

通解为 $e^y = e^x + C$

或 $y = \ln(e^x + C)$

12.2.一

2. 微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ 的通解为_____.

解 原方程为齐次方程

设 $u = \frac{y}{x}$ 则 $y' = u + u'x$

原方程变形为 $u + u'x = u + \frac{1}{u}$

即 $u'x = \frac{1}{u}$ 变量可分离方程

变量分离 $u du = \frac{1}{x} dx$

两边积分 $\int u du = \int \frac{1}{x} dx$ 即 $\frac{1}{2} u^2 = \ln x + C$

通解为 $\frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \ln x + C$ 即 $y^2 = 2x^2(\ln x + C)$

12.2.一

3. 微分方程 $y' - y = e^x$ 的通解为_____.

解 原方程为一阶线性非齐次

其中 $P(x) = -1, Q(x) = e^x$

$$\begin{aligned}\text{通解为 } y &= \left[\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right] e^{-\int P(x) dx} \\ &= \left[\int e^x e^{\int -1 dx} dx + C \right] e^{\int dx} \\ &= \left[\int e^x e^{-x} dx + C \right] e^x \\ &= \left[\int dx + C \right] e^x \\ &= (x + C) e^x\end{aligned}$$

12.2.一

3. 微分方程 $y' - y = e^x$ 的通解为_____.

解 原方程为一阶线性非齐次

1°. 相应齐次方程 $y' - y = 0$

其通解为 $y = Ce^{-\int (-1)dx}$ 即 $y = Ce^x$

2°. 常数变易

设 $y = u(x)e^x$ 是原方程的解

$y' = u'(x)e^x + u(x)e^x$ 代入原方程

$u'(x)e^x = e^x$ 即 $u'(x) = 1, u(x) = x + C$

通解为 $y = (x + C)e^x$

12.2.一

4. 解微分方程 $xy' + x^2y = e^x y^3$ 时, 应作代换 $z = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 $y' + xy = x^{-1}e^x y^3$

方程为 $n=3$ 的贝努利方程

应作代换 $z = y^{1-3} = y^{-2}$

原方程变为 $\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^{-1}e^x$

通解为 $y^{-2} = z = [\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C]e^{-\int P(x)dx}$
 $= [\int (-2x^{-1}e^x)e^{\int -2x dx} dx + C]e^{\int 2x dx}$

12.2.二

1. 求微分方程 $ydx + (x^2 - 4x)dy = 0$ 的通解.

解 变量可分离方程

变量分离 $\frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x^2 - 4x}dx$

两边积分 $\int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{1}{x^2 - 4x}dx = -\int \frac{1}{x(x-4)}dx$
 $= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-4} \right) dx$

通解为 $\ln y = \frac{1}{4} \ln \frac{x}{x-4} + C_1$

$$4 \ln y = \ln \frac{x}{x-4} + C_1 \quad \text{即} (x-4)y^4 = Cx$$

12.2.二

2. 求微分方程 $(1+x^2)y' = \arctan x$ 满足 $y(0) = 0$ 的特解.

解 变量可分离方程

变量分离
$$dy = \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$$

两边积分
$$\int dy = \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$$

通解为
$$y = \frac{1}{2} \arctan^2 x + C$$

由于 $y(0) = 0$ 因此 $C = 0$

特解为
$$y = \frac{1}{2} \arctan^2 x$$

12.2.二

3. 质量为1kg的物体,受力的作用作直线运动,此力与时间成正比,与物体的速度成反比,但 $t = 1\text{s}$ 时,速度 $v = 8\text{m/s}$,力 $f = \frac{1}{8}\text{N}$,试问什么时候物体的速度为12m/s.

解 由牛顿第二定律知 $f = ma = \frac{dv}{dt} = k \frac{t}{v}$

$$v(1) = 8, \quad f(1) = \frac{1}{8}, \quad k = \frac{1}{8} \cdot 8 = 1$$

变量可分离方程 $v dv = t dt$ 两边积分 $\int v dv = \int t dt$

通解为 $\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}t^2 + C$ 由于 $v(1) = 8$, 因此 $C = \frac{63}{2}$

$$\text{要使 } v(t) = 12, \quad \frac{144}{2} = \frac{1}{2}t^2 + \frac{63}{2} \quad t^2 = 81$$

即 $t = 9\text{s}$

12.2.二

4. 微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$ 的通解.

解 原方程为齐次方程

$$\text{设 } u = \frac{y}{x} \quad \text{则 } y' = u + u'x$$

$$\text{原方程变形为 } u + u'x = u + \tan u$$

$$\text{即 } u'x = \tan u \quad \text{变量可分离方程}$$

$$\text{变量分离 } \cot u du = \frac{1}{x} dx$$

$$\text{两边积分 } \int \cot u du = \int \frac{1}{x} dx \quad \text{即 } \ln \sin u = \ln x + C_1$$

$$\text{通解为 } \ln \sin \frac{y}{x} = \ln x + C_1 \quad \text{即 } \sin \frac{y}{x} = Cx$$

12.2.二

5. 微分方程 $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$ 满足 $y(1) = e^2$ 的特解.

解 $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$ 为齐次方程

由于 $y(1) = e^2$,

设 $u = \frac{y}{x}$ 则 $y' = u + u'x$

$$e^{C+1} = e^2, C = 1$$

原方程变形为 $u + u'x = u \ln u$

特解为 $y = xe^{x+1}$

即 $u'x = u(\ln u - 1)$ 变量可分离方程

变量分离 $\frac{1}{u(\ln u - 1)} du = \frac{1}{x} dx$

两边积分 $\int \frac{1}{u(\ln u - 1)} du = \int \frac{1}{x} dx$ 即 $\ln(\ln u - 1) = \ln x + C_1$

通解为 $\ln \frac{y}{x} = Cx + 1$ 即 $y = xe^{Cx+1}$

12.2.二

6. 求微分方程 $y' + y \tan x = \sin 2x$ 的通解.

解 原方程为一阶线性非齐次

其中 $P(x) = \tan x, Q(x) = \sin 2x$

$$\text{通解为 } y = [\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C]e^{-\int P(x)dx}$$

$$= [\int \sin 2x e^{\int \tan x dx} dx + C]e^{-\int \tan x dx}$$

$$= [\int \sin 2x e^{-\ln \cos x} dx + C]e^{\ln \cos x}$$

$$= [\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx + C] \cos x$$

$$= (-2 \cos x + C) \cos x = C \cos x - 2 \cos^2 x$$

12.2.二

7. 求微分方程 $y' = \frac{y}{x + y^3}$ 的通解.

解 $y' = \frac{y}{x + y^3} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + y^2$ 为一阶线性非齐次

其中 $P(y) = -\frac{1}{y}$, $Q(y) = y^2$

通解为 $x = [\int Q(y)e^{\int P(y)dy} dy + C]e^{-\int P(y)dy}$

$$= [\int y^2 e^{\int -\frac{1}{y} dy} dy + C] e^{\int \frac{1}{y} dy}$$

$$= [\int y dy + C] y$$

$$= (\frac{1}{2} y^2 + C) y = Cy + \frac{1}{2} y^3$$

12.2.二

8. 设曲线积分 $\int_L [f(x) - e^x] \sin y dx - f(x) \cos y dy$ 与路径无关, 且 $f(0) = 0$, 求可导函数 $f(x)$.

解 由曲线积分与路径无关的条件知

$$[f(x) - e^x] \cos y = -f'(x) \cos y$$

即 $f'(x) + f(x) = e^x$ 为一阶线性非齐次

其中 $P(x) = 1, Q(x) = e^x$

$$\begin{aligned} \text{通解为 } f(x) &= \left[\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right] e^{-\int P(x) dx} \\ &= \left[\int -e^x e^{\int dx} dx + C \right] e^{-\int dx} \\ &= \left[-\int e^{2x} dx + C \right] e^{-x} = (-x + C) e^x \end{aligned}$$

由于 $f(0) = 0$, 则 $C = 0$ 从而 $f(x) = -x e^x$

12.2.二

9. 求微分方程 $y' - y = xy^2$ 的通解.

解 方程为 $n=2$ 的贝努利方程

应作代换 $z = y^{1-2} = y^{-1}$

方程变为 $\frac{dz}{dx} + z = -x$ 为一阶线性非齐次

$$\begin{aligned}\text{通解为 } y^{-1} = z &= \left[\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right] e^{-\int P(x) dx} \\ &= \left[\int (-x) e^{\int dx} dx + C \right] e^{-\int dx} \\ &= \left(-\int x e^x dx + C \right) e^{-x} = [-(x-1)e^x + C] e^{-x} \\ &= C e^{-x} + 1 - x \\ \text{即 } y &= \frac{1}{C e^{-x} + 1 - x}\end{aligned}$$

12.2.二

10. 求微分方程 $x^2 y' + xy = y^2$ 满足 $y(1) = 1$ 的特解.

解 $y' + x^{-1}y = x^{-2}y^2$ 方程为 $n=2$ 的贝努利方程

应作代换 $z = y^{1-2} = y^{-1}$

方程变为 $\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = -\frac{1}{x^2}$ 为一阶线性非齐次

通解为 $y^{-1} = z = [\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C]e^{-\int P(x)dx}$

$$= [\int (-\frac{1}{x^2})e^{-\int \frac{1}{x}dx} dx + C]e^{\int \frac{1}{x}dx}$$

$$= (-\int \frac{1}{x^3}dx + C)x = (\frac{1}{2}x^{-2} + C)x = \frac{1}{2x} + Cx$$

由于 $y(1) = 1$, $\frac{1}{2} + C = 1, C = \frac{1}{2}$,

特解为 $y = \frac{2x}{1+x^2}$

12.2.二

11. 求微分方程 $xy^2dx + x^2ydy = 0$ 的通解.

解 变量可分离方程 $x^2ydy = -xy^2dx$

变量分离 $\frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx$

两边积分 $\int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{1}{x}dx$

通解为 $\ln y = -\ln x + C_1$

即 $y = \frac{C}{x}$